Les nombres et leurs cycles, bases de la combinaison, de la cohérence et de l’ajustement des sons entre eux en musique

Michel Mourey

EMR 24026

EDITIONS MARC REIFT
Route du Golf 150 • CH-3963 Crans-Montana (Switzerland)
Tel. +41 (0) 27 483 12 00 • Fax +41 (0) 27 483 42 43 • E-Mail : info@reift.ch • www.reift.ch

1) Préambule

Les styles de musique ont – ils un dénominateur commun ? Qu’est-ce qui nous fait apprécier plutôt l’un que l’autre et telle façon de le jouer ?

La capacité de la musique à nous mettre en correspondance avec un monde « psycho-émotionnel » différent utilise l’ « harmonie » d’une manière ou d’une autre.

Le terme d’harmonie dans le domaine musical désigne la combinaison de notes jouées simultanément. En particulier, l’harmonie tonale s’appuie sur les lois de l’acoustique et de la décomposition « harmonique » des sons.

Avant le solfège, nous avons les nombres et leurs assemblages dans le cadre d’un système acoustique.

2) Les cycles

Un cycle se manifeste par la transformation d’un système qui revient à son état initial par récurrence suivant :

- Un référentiel dimensionnel
- Un observateur
- Un paramètre
    - Dans des temps égaux avec des périodes successives T (fréquence temporelle $f = 1 / T$)
    - Sur des longueurs identiques (période spatiale : longueur d’onde $\lambda = c / f$ si c = vitesse de propagation de la vibration)
    - Ou suivant un paramètre mesurable

La somme de plusieurs signaux périodiques, de périodes T_1, T_2, T_3, …

avec $T_1 > T_2 > T_3 > \ldots$

est un signal périodique de période $T = n_1 T_1 = n_2 T_2 = n_3 T_3 = \ldots$

avec $T \geq T_1$ et $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ étant des entiers positifs

C’est le cycle commun T qui donne la cohérence (consonance) entre les signaux.

Le son musical est dû à une vibration périodique (dans le temps) d’une masse. La fréquence temporelle exprimée en Hertz (nombre de cycles par seconde) définit la hauteur des sons musicaux audibles (20 à 20000 Hz).

Une vibration périodique de fréquence f se décompose mathématiquement en une somme de vibrations sinusoïdales de fréquences nf : (f, 2f, 3f, 4f, 5f, 6f, …) appelées harmoniques (1, 2, 3, 4, …).
Les sons musicaux sont périodiques mais non sinusoïdaux.

<table>
<tr><td>DO RE</td><td>RE MI</td><td>MI FA</td><td>FA SOL</td><td>SOL LA</td><td>LA SI</td><td>SI DO</td></tr>
<tr><td>9/8</td><td>10/9</td><td>16/15</td><td>9/8</td><td>10/9</td><td>9/8</td><td>16/15</td></tr>
<tr><td>Ton majeur</td><td>Ton mineur</td><td>Demi-ton</td><td>Ton majeur</td><td>Ton mineur</td><td>Ton majeur</td><td>Demi-ton</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tierce majeure 5/4</td><td colspan="2">Tierce mineure 6/5</td><td colspan="2">Tierce majeur 5/4</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Quinte (5/4) x (6/5) = 3/2</td><td colspan="3">Quarte (10/9) (9/8) (16/15) = 4/3</td></tr>
<tr><td colspan="3">Quarte (9/8)(10/9) (16/15) = 4/3</td><td colspan="4">Quinte (9/8)(10/9)(9/8)(16/15) = 3/2</td></tr>
<tr><td colspan="5">Sixte Majeure (3/2)(10/9) = 5/3</td><td colspan="2">Tierce mineure 6/5</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tierce majeure 5/4</td><td colspan="5">Sixte mineure 8/5</td></tr>
<tr><td colspan="7">Octave (3/2) (4/3) = 2</td></tr>
</table>

Cette gamme n’est pas parfaite du point de vue harmonique : RE LA (40/27) s’écarte de la quinte exacte (3/2) et RE FA (32/27) de la tierce mineure exacte (6/5).
La transposition est difficile avec de nouvelles notes très irrégulièrement échelonnées dans l’octave.

Gamme chromatique à 21 degrés du système de Zarlino:
7 degrés de la gamme diatonique
7 degrés rehaussés (dièses #)
7 degrés abaissés (bémolisés b)

Notes altérées par le rapport : Tierce majeure / Tierce mineure = (5/4)(5/6) = 25 / 24
<u>Emploi des dièses # :</u> exemple avec RE prise pour tonique

RE MI	MI FA#	FA# SOL	SOL LA	LA SI	SI DO#	DO# RE
10/9	(16/15)25/24	(9/8) 24/25	10/9	9/8	(16/15) 25/24	(9/8) 24/25
	10/9	27/25			10/9	27/25

RE-FA# < tierce majeure et RE-LA < quinte
<u>Emploi des bémols b :</u> exemple avec FA prise pour tonique

FA SOL	SOL LA	LA SI b	SI b DO	DO RE	RE MI	MI FA
9/8	10/9	(9/8) 24/25	(16/15) 25/24	9/8	10/9	16/15
		27/25	10/9			

FA-DO = quinte et FA-LA = tierce majeure demi-ton LA-Sib < 16/15
Pour diéser une note, on multiplie son intervalle de la gamme diatonique par (25/24)
Pour bémoliser une note, on divise son intervalle de la gamme diatonique par (25/24)

Il en résulte de ce qui précède que :

- le dièse d’une note n’est pas rigoureusement égal au bémol de la note suivante.
  Exemple : DO# et REb (avec fréquence de DO = 1)
  DO# = 1 x 25/24 = 25/24 = 1,042
  RE b = 9/8 x 24/25 = 27/25 = 1,08
- Il y a une dégradation (concernant la mélodie) par rapport à la gamme de Pythagore en quintes successives ramenées à l’octave.

Gamme tempérée : en Europe, le tempérament est né du problème de la fermeture du cycle des quintes soit $(3/2)^{12} / 2^{7} = 531441 / 524288) \neq 1$
Les tempéraments servent à l’accordage des intervalles d’ instruments à sons fixes pour une gamme.

Tempéraments mésotoniques : tempérament moyen ou ton moyen (ex : époque baroque)
A l'origine, ce tempérament est construit en diminuant toutes les quintes justes d'une fraction de comma syntonique afin que tous les tons soient égaux à une valeur médiane.
En préservant l'octave, les solutions sont fondées de compromis sur la base de la quinte ou de la tierce.
Comma syntonique
= ton majeur / ton mineur = 2 tons majeurs (ou tierce pythagoricienne) / tierce pure
= (9/8) / (10/9) = (81/64) / (5/4) = 81/80

Tempérament égal sur l'octave : (JS Bach : 1685 - 1750) avec 12 demi-tons égaux (gamme chromatique bien tempérée) qui s'est imposé vers 1740 en Europe.
intervalle d'un demi-ton X = $2^{1/12}$ = racine douzième de 2 (les 7 notes subsistent) = 1,0595

½ ton		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Note	DO	DO#	RE	RE#	MI	FA	FA#	SOL	SOL#	LA	LA#	SI	DO
fréquence	f	X f	X^2 f	X^3 f	X^4 f	X^5 f	X^6 f	X^7f	X^8 f	X^9 f	X^{10} f	X^{11} f	2 f

C'est une gamme pour une transposition facile (modulation en langage musical) par décalage des notes suivant un nombre entier de demi-tons (le dièse d'une note est rigoureusement égal au bémol de la note suivante). Elle est adaptée aux instruments à sons fixes.

Cette gamme devient plus informative que sensitive. Elle reste dans le domaine de l'acceptable et donc plus intellectuelle.
Exemples : approximation de la quinte : do- sol = $2^{7/12}$ = 1,4983 au lieu de 3/2 = 1,5
Approximation de la tierce : do-mi = $2^{4/12}$ = 1,2599 au lieu de 5/4 = 1,25

8) Maitrise des durées :

Seul le cycle s'oppose à la dérive (soldats marchants au pas, mouvements des archets des instrumentistes)

Précision rythmique :

La base du rythme est la **pulsation** : les mesures successives et égales en durée de temps donnent la pulsation.

Le **tempo** donne la vitesse de pulsation (flux ou débit d'unités choisies) en nombre de pulsations à la minute. Il y a toujours régularité de la pulsation.

La **mesure** dure un nombre d'unités de temps N de valeurs de note

Durée de la mesure

= (unité choisie de valeur de note) x (nombre de valeurs de note dans la mesure)

= N « temps » de la mesure

Le « temps » est une division de la mesure

L’oreille est : - sensible aux rapports de fréquences (savarts : 1000 log f_2 / f_1)

- **insensible aux phases** des composantes d’un son d’une source

S’il arrive simultanément à l’oreille plusieurs ondes sinusoïdales de fréquences différentes, une modification de leurs phases n’entraîne aucun changement dans la perception : l’oreille est insensible aux phases. Pour des fréquences identiques, il y a un effet de relief acoustique (stéréophonie)
- **sensible aux rapports d’intensité** (décibels : 10 log I_2 / I_1), l’intensité étant proportionnelle au carré de la pression acoustique p captée par l’oreille ($I = kp^2$).

L’augmentation relative de la sensation sonore est proportionnelle au logarithme de la grandeur excitatrice pour une fréquence (hauteur) donnée.

Le décibel est une unité de variation (niveau) : 1 dB = 1 Bel / 10

- Seuil de détection du son = 0 dB (niveau : pression atmosphérique)
- Différentiel de perception du niveau sonore = environ 1 dB
- Quand la puissance est multipliée par k, la sensation augmente de 10 log k décibels.
- Quand la sensation S augmente de s dB, la puissance est multipliée par $10^{s/10}$

  Le son audible le plus fort (120dB) au-dessus du bruit de fond d’une ambiance calme (30dB) est de : 120 – 30 = 90 dB soit 9 x 10 dB

  Soit un son 9 fois doublé en sensation, c'est-à-dire $2^9 = 512$ fois plus fort et non pas 4 fois (car 4 x 30 = 120) comme cela serait le cas si la sensation était proportionnelle au niveau en dB.

L’isosonie (égale sensation sonore) est fonction de la fréquence :

- La fréquence de référence est de 1000 Hz (meilleure écoute moyenne en fréquence)
- La sensation de niveau (appelée sonie) est une sensation égale à celle du niveau du son de référence de 1000 Hz
- Une courbe isosonique correspond à l’intensité pour laquelle toutes les fréquences de la gamme audible provoquent une sensation de niveau (sonie) égale à celle du niveau du son de référence de 1000 Hz

  1 sone est le niveau subjectif d’un son de 1000Hz qui possède un niveau physique de 40 dB.

  Un son de 4 sones est deux fois plus fort qu’un son de 2 sones.

L’oreille et ses limites :

- sensible aux fréquences situées entre ~ 20 et ~ 20000 Hz (10 octaves ou 2^{10} = 1024) ou longueurs d’onde situées entre 17mètres et 1,7 cm (dans l’air à 15 °C) soit 300000 sons différents ou 150 notes monochromatiques sur une octave

- sensible à l'intensité différemment suivant la fréquence dans la bande passante
  (référence : 1000 Hz avec 325 degrés d'intensité perceptibles)
- dynamique de l'ouïe (entre seuil de perception et seuil de douleur) :
  120 décibels (rapport de 10^{12})
- pouvoir de discrimination différentielle de l'intensité : 1 décibel (rapport de 1,25)
- pouvoir de discrimination différentielle moyen de la hauteur (fréquence):
  2 savarts (rapport de 1,005)
  une octave = 301 savarts
  tolérance jusqu'à 8 savarts (rapport de 1, 019) pour la justesse

Le plus petit intervalle perceptible en fréquence se situe à 1000Hz :

$\Delta f = 0{,}003 \times 1000 = 3$ Hz

Le seuil $\Delta f / f = 0{,}003$ est quasiment constant pour les fréquences évoluant entre 200 et 5000 Hz. Cette valeur qui parait « grande » peut être comparée à l'intervalle musical du demi-ton pour avoir une meilleure appréciation de cet intervalle.

L'écart fréquentiel entre deux demi-tons aux alentours de 1000 Hz est :

$1000 (2^{1/12} - 1) = 59$ Hz soit plus de 19 fois l'intervalle perceptible.

- pouvoir de localisation de la source sonore à 3° géométrique près
- temps d'intégration de l'oreille : 50 millisecondes (peut varier jusqu'à 100 ms)
  La différence entre deux sons identiques parvenant successivement à l'oreille est perceptible, si la différence entre leur temps d'arrivée dépasse 50 millisecondes (un écho est franc s'il parvient plus de 50 ms après le son direct soit $t = 2d/c > 50$ ms d'où $d > 8{,}5$ m)

Audiogramme :

tonal : mesure en dB l'intensité suffisante à laquelle différentes fréquences (125 à 8000 Hz) doivent être émises pour être perçues par un individu
vocal : mesure la compréhension de la parole
500 à 2000 Hz : zone conversationnelle
2000 à 8000 Hz : intelligibilité du message sonore
L'oreille est un million de fois plus sensible à 1000 Hz qu'à 30 Hz

Quel que soit le niveau sonore dont il s'agit, la faculté d'entendre dépend de trois facteurs : le nerf acoustique, la constitution même de l'oreille et la résonance qui se produit dans le conduit auditif. Comme cette résonance, chez l'homme, correspond à une fréquence naturelle d'environ 3500 Hz, notre oreille est particulièrement sensible aux niveaux sonores allant de 2000 à 5000Hz. Or il se trouve que ce sont précisément les fréquences produites par la plupart des équipements automatisés, comme les imprimantes ou les machines de traitement de texte. Enregistrées par notre oreille, les ondes sonores, grâce à un mécanisme subtil et d'une extrême sensibilité, se transforment en énergie électrique, puis cette énergie est elle-même captée par la zone du cerveau qui a l'ouïe dans ses attributions.

Le conduit auditif de l'oreille est assimilable à un tube acoustique ouvert/fermé (par le tympan). Chez l'adulte, la longueur moyenne du conduit est de L = 2,7 cm, dans ce cas, les fréquences de résonance naturelle de l'oreille seront :

$F_n = (2n + 1)\ c / 4L$ avec $c = 340$ m/s

n=0 F_0= 3148 Hz

n=1 F_1= 9444 Hz

n=2 F_2= 15740 Hz

Caractéristiques de l'oreille:

- insensibilité à la « fréquence zéro », à la valeur de la pression barométrique (équilibrage des pressions par la trompe d'Eustache). C'est ce qui permet à l'oreille de fonctionner normalement dans une large gamme de pressions barométriques (~ 0,1 à 10 bar).
- Possibilité (moyennant un certain entraînement) de mesurer les fréquences des principales composantes d'un son dans la gamme 100 – 4000 Hz.
- Impossibilité de discerner deux sons de polarités opposées et, plus généralement, insensibilité aux phases des composantes d'un son.
- Une oreille saine peut capter des sons situés entre 20 et 20000 Hz, ce qui représente quelques 300000 sons différents.
  A la fréquence 1000 Hz le seul d'audibilité se situe à 0,2 nanobar efficace (2×10^{-5} N/m²). Tel est le niveau zéro conventionnel de l'échelle logarithmique (0 dB) des pressions acoustiques, ainsi que de l'échelle des phones.
  sensation physiologique d'intensité : courbes de Fetcher et Munson
  exemple de sonométrie :
  60 phones sont obtenus par un son de 200 nanobars efficaces à 1000 Hz ou un son de 2000 nanobars efficaces à 45 Hz).
  20 phones sont obtenus par un son de 60 dB à 50 Hz ou un son de 80 dB à 4000 Hz

On notera que, dans la gamme de fréquence où l'oreille est le plus sensible, les flux de puissance correspondant au seuil sont très faibles, de l'ordre de 10^{-12} watt / m². Si l'on attribue à l'oreille une surface de captation de l'ordre de 1cm², on voit :
Ps = (pa efficace)² / ρ c = 10^{-12} watt / m²
Soit une puissance recueillie de $10^{-12} * 10^{-4} = 10^{-16}$ watt alors que la puissance du bruit thermique dans une bande de 3000 Hz est d'environ 10^{-17} watt à la température ambiante.
L'oreille constitue donc un appareil très sensible.

<u>La mesure des différences sonores afin d'apprécier le niveau d'intensité :</u>

Le son se mesure de deux façons. Le Hertz (Hz : nombre de vibrations par seconde) détermine les niveaux (hauteurs) sonores (ex : do, ré, mi, …). Le décibel (dB) pour sa part, indique l'intensité relative au son, c'est à dire sa puissance (fort, faible).

La sensibilité spécifique de l'oreille humaine fait qu'un son de 60 dB à la fréquence de 50 Hz, est perçu comme aussi fort qu'un son de 80 dB à 2000 Hz ou de 90 dB à 4000 Hz (à l'échelle de 20 phones)
Courbes de sensibilité de l'oreille passant par 1000 Hz selon Fletcher et Munson
0 phones : 10^{-12} watt / m² à 1000 Hz
20 phones : 10^{-10} watt / m² à 1000 Hz

Le nombre d'or :

Il existe un nombre qui n'est pas entier et qui joue un rôle privilégié dans l'art et dans l'architecture en Occident : le nombre d'or. Il est égal au rapport entre la longueur (a + b) et la largeur (a) d'un rectangle tel que (a + b) / a = a / b soit $(1 + \sqrt{5}) /2 = 1{,}61803$ qui est la solution positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$

Fibonacci (1175 – 1250) a créé une suite de nombres entiers, tels que chaque membre de la suite est égale à la somme des deux précédents : 0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …Le rapport de deux termes consécutifs tend vers la valeur du nombre d'or φ avec une modulation où les maximums (ou minimums) sont sur une valeur sur deux encadrant φ. Cette onde amortie a donc une période double de celle de la suite.

Cette suite se retrouve :

- Dans des constructions géométriques : triangle d'or, spirale logarithmique
- Dans des phénomènes naturels : nombre de feuilles réparties en spirale autour d'une tige, dessin spiralé des coquillages.
- En musique : intervalle musical (I) rendu par la « sixte dorée» (système doré)

n	1	2	3	4	5	6	∞ infini
F	0+1	1+1	2+1	3+2	5+3	8+5	
	1	2	3	5	8	13	
$I = F_{n+1} / F_n$		2	3/2 = 1,5	5/3 = 1,666	8/5 = 1,6	1,625	1,61803
		octave	quinte	Sixte majeure	Sixte mineure		Nb d'or
2 / I		1	4/3 = 1,33	6/5 = 1,2	5/4 = 1,25		1,23606
		unisson	quarte	Tierce mineure	Tierce majeure		2 / φ

Adaptation, tolérance, tempérance :

Dans un accord, la simultanéité des notes n'est pas totale, ce qui influence le déphasage entre fréquences et donc favorise ou non certains harmoniques. Plusieurs systèmes oscillants donnent un paquet d'ondes et des accords entre certains harmoniques compatibles.

Notre cerveau donne un sens à notre environnement sonore. La structure se révèle par une adaptation dynamique par synthèse additive ou soustractive.

Cas du piano : Un marteau frappe 3 cordes identiques en même temps. Le niveau sonore produit par une corde est de 60 dB, pour 3 codes, il sera de 66 dB (puissance sonore triple).

Les trois ondes produites par les cordes peuvent être déphasées légèrement et donc changer l'amplitude des harmoniques résultants. De même, lorsqu'un grand nombre de violons jouent à l'unisson, il se produit une multitude de battements plus ou moins aléatoires. Il s'ensuit des fluctuations d'amplitude qui génèrent un son plus naturel que celui d'un unique violon amplifié.

Un accord est une superposition de plusieurs intervalles (tierces en harmonie tonale).

- Accords de quintes justes (ré-la et si-fa# ne sont pas justes : 40/27 au lieu de 3/2)

Accords parfaits majeurs justes

Fond.	1	Fa	Do	Sol	La	Mi	Lab	Mib
T maj	5/4	La	Mi	Si	Do#	Sol#	Do	Sol
Quinte	3/2	Do	Sol	Ré	Mi	Si	Mib	Sib

Accords parfaits mineurs justes

Fond	1	La	Mi	Fa	Do	Sol	Fa#	Do#	Sol#
T min	6/5	Do	Sol	Lab	Mib	Sib	La	Mi	Si
Quinte	3/2	Mi	Si	Do	Sol	Ré	Do#	Sol#	Ré#

- Accords de septième
- Accords de neuvièmes

La syntonisation d'une fréquence f sur une fréquence excitatrice déterminée f_E :

f_E : fréquence de l'excitateur fixée par référence au système acoustique musical choisi

f : fréquence du résonateur variable

La résonance parfaite est obtenue lorsque $f = f_E = f_R$ (syntonie)

f_1	…	fa	…	f_E	…	f_b	…	f_2

$f_1 \leq f \leq f_2$: plage de fréquences avec battements ($f_2 - f_1$)

$f_a \leq f \leq f_b$: plage de fréquences avec battements imperceptibles

C'est la zone de tempérance

La pureté d'un intervalle est liée à l'absence de battements audibles et à la correspondance des harmoniques.

La justesse d'un intervalle est liée au cadre d'un système acoustique (gamme, contexte).

La consonance (cohérence) d'un intervalle quelconque est d'autant plus importante que les battements entre deux harmoniques proches l'un de l'autre, sont de faible fréquence.

Exemple : il y a moins de transfert d'énergie entre deux diapasons de 435 Hz et 440 Hz (battement de 5 Hz) qu'entre deux diapasons de 440 Hz (battement nul)

La gamme à tempérament égal est dépourvue de consonances communes autres qu'approchées. Elle n'est pas le résultat d'une construction harmonique.

Les systèmes acoustiques :

Les systèmes acoustiques et les tempéraments associés ont organisés les tonalités et les modulations. Le calcul des répétitions d'intervalles montre l'irrégularité, voire l'impossibilité de certaines modulations. Il n'existe pas de système parfait.

Les différents systèmes sont :

- Harmoniques, construits sur la résonance et les fréquences harmoniques, avec la notion d'octave juste (doublement de fréquence) : $f_2 / f_1 = p / 2^k$
  p : rang de l'harmonique et k = 0, 1, 2, 3, 4, …

- Cycliques (pythagoricien en quintes justes, dorés, irrationnels), construits par répétition d'un intervalle dans le cadre d'une octave, à partir d'un nombre quelconque q (quinte juste, nombre d'or, …) suivant la série
  …, $1/q^2$, $1/q$, 1, q, q^2, …
  En maintenant $1 < (f_2 / f_1) < 2$ donc multiplier ou diviser ce nombre par une puissance de 2
  Exemple : les systèmes mésotoniques sont pseudo-cycliques avec un régulateur r
  1, q, q r, q^2 r, $q^2 r^2$, $q^3 r^2$, $q^3 r^3$, $q^4 r^3$, $q^4 r^4$, $q^5 r^4$, $q^5 r^5$, $q^6 r^5$, 2
  Avec les intervalles successifs q, r, q, r, q, r, q, r, q, r, q, r
  La relation $q^6 r^6 = 2$ ferme le système : $q\, r = 2^{1/6}$
  Si tierce majeure / tierce mineure = q = 25/24 soit 71 cents
  $r = (24/25)\, 2^{1/6}$ soit 129 cents
  quinte = $q^4 r^3 = (25/24)^4 (24/25)^3 2^{1/2} = 1{,}473 \ldots$ donc < 3/2
  si q = r il s'agit d'un tempérament égal

- Obtenus par répétition d'une fraction d'un intervalle juste en ne respectant pas l'intervalle naturel de l'octave

- A intonation juste avec des rapports d'intervalles sous forme de fraction de nombres entiers

- A micro-intervalles (micro-tempérés : subdivision du tempérament égal)