Liens entre hauteurs et intervalles musicaux des instruments

Michel Mourey

EMR 18535

1) La spirale logarithmique
2) Application aux instruments
3) Exemple de la flute à bec (transposition)
4) Le cycle des quintes
5) Détermination d'une note à partir de sa fréquence dans la gamme tempérée
6) Perception différentielle en fréquence
7) Le cycle des harmoniques
8) Les notes de la gamme tempérée viennent de la gamme naturelle (Zarlino)
9) Le système tempéré

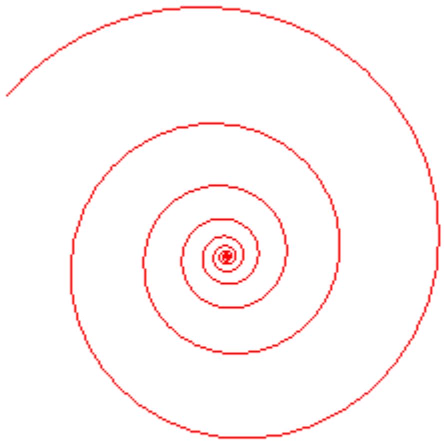
EDITIONS MARC REIFT

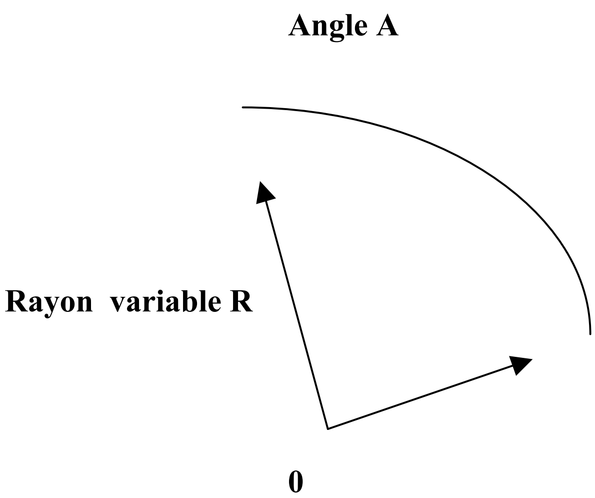
Route du Golf 150 • CH-3963 Crans-Montana (Switzerland)
Tel. +41 (0) 27 483 12 00 • Fax +41 (0) 27 483 42 43 • E-Mail : info@reift.ch • www.reift.ch

1) La spirale logarithmique

Courbe d'équation polaire $R = K\ B^{A}$

soit $\log (R/K) = A \log B$ avec $B > 0$ et $B \# 1$





R augmente en progression géométrique de raison 2^{2p} par rapport à O à chaque tour complet.
Un tour complet (360 °) représente une octave.
Les distances entre spires sont multipliées par 2^{2p} avec p = 0, 1, 2, 3, 4, ...
Le rayon est progressivement multiplié par 2 pour une rotation complète (fréquence multipliée par 2).
Il représente la fréquence de la note musicale.

Tous les points de la spirale correspondent à une hauteur de note.

L'angle A entre deux rayons représentent un intervalle de fréquences exprimées en Hertz .
La spirale tourne autour du point 0 qui représente la fréquence 0 ou l'absence de vibrations.

Un tour complet soit 360° est divisé par 1200 qui représentent les 1200 cents (C) de l'octave dans un système tempéré.

$$C = 1200 \log_2 A = 1200 (\log A / \log 2)$$

Un intervalle A est donc exprimé en cents : 1 cent = (1 / 1200) octave
On obtient 100 cents par demi-ton dans la gamme tempérée.

$$f2 / f1 = 2^{(A/1200)}$$

$$\log (f2 / f1) = \log (2^{A/1200})$$
$$\log f2 - \log f1 = (A /1200) \log 2$$

soit $A = 1200 \{(\log f2 - \log f1) / \log 2\}$ avec $A > 0$

A devant être positif il faut que f2 > f1 d'une note grave à une note aigue ou inversement.

exemple de la quarte juste : f2 / f1 = 4 / 3

$$A = 1200 \{(\log (4/3) - \log 1) / \log 2\} \qquad \log 1 = 0$$

$A = 1200 \{(\log 4 - \log 3) / \log 2\}$

$A = 1200 \{(0,602 - 0,477) / 0,301\}$

$A = 1200 (0,415)$

A = 498 cents
Soit A : 498 / 100 = 4,98 demi tons tempérés au lieu de 5

2) Application aux instruments :

Dans le cadre d'un changement de diapason, de transposition ou d'ajustement d'intervalle :

- Fréquences et longueurs de corde (guitare)
- Fréquences, longueurs et diamètres des colonnes d'air (orgue, flute)

Changement de diapason d'un tuyau d'orgue :

La1 = f1 référence
La2 = f2 avec f2 > f1

L1 : longueur de référence du tuyau qui donne le La1
L2 : longueur du nouveau tuyau

A = f2 / f1

La longueur est inversement proportionnelle à la fréquence (idem pour les cordes).

$$(1/L2) / (1/L1) = 2^{(A/1200)}$$

$$L1 / L2 = 2^{(A/1200)}$$

$$L2 = L1 / 2^{(A/1200)}$$

$$L2 = L1 / 2^{\{(\log f2 - \log f1) / \log 2\}}$$

Diamètre de la colonne d'air :

D1 : référence

D2 : nouvelle colonne d'air

Pour chaque octave (tour complet de la spirale) le rayon augmente de racine carrée de 2 soit $2^{1/2}$ (les mesures étaient chinoises à l'origine).

$$D1 / D2 = 2^{(1/2)\,(A/1200)}$$

$$D2 = D1 / 2^{(1/2)\,(A/1200)}$$

$$D2 = D1 / 2^{(\log f2 - \log f1) / 2 \log 2}$$

3) **Exemple de la flute à bec (transposition)/**

Flûte alto (fa3→fa5) : référence

Flûte soprano (do4→do6)

f1 (fa3) = 4/3

f2 (do4) = 2

L1 = 48,5 cm

L2 = longueur de la flûte soprano

$$L2 = 48,5 / 2^{\{(\log 2 - \log(4/3)\}/\log 2}$$

Log2 = 0,3

Log (4/3) = log 4 – log3 = 0,6 – 0,48 = 0,12

$$L2 = 48,5 / 2^{\{(0,3 - 0,12\}/0,3}$$

$$L2 = 48,5 / 2^{0,6}$$

$$L2 = 48,5 / 1,52$$

$$L2 = 31,9 \text{ cm}$$

Vérification :

La flûte à bec est un tuyau ouvert / ouvert et donc sur sa longueur (trous bouchés) nous aurons : $\lambda / 2$

λ étant la longueur d'onde

$\lambda = c / f$ c : vitesse du son dans l'air = 340 m/s

f1 = 349,22 Hz

λ = 340 / 349,22 = 0,97 m

λ /2 = 0,487 m soit 48,7 cm

f2 = 523,19 Hz

λ = 340 / 523,19 = 0,65 m

λ /2 = 0,325 m soit 32,5 cm

La longueur réelle de tube est inférieure à la longueur théorique car la pression n'est pas totalement nulle au niveau du trou, ce qui augmente la raideur.

Le calcul est identique pour chaque trou.

Valeurs théoriques des diamètres pour des tubes à diamètre constant

D1 = 12 mm

D2 : diamètre de la colonne d'air de la flûte soprano

$$D2 = 12 / 2^{(\log f2 - \log f1) / 2 \log 2}$$

$$D2 = 12 / 2^{0,6}$$

$$D2 = 12 / 1,52 = 7,89 \text{ mm}$$

Dans la réalité le tube se rétrécit à l'extrémité pour éviter les pertes de pression et gagner en puissance : il s'agit d'expérience de fabrication

4) Le cycle des quintes :

Quinte juste : 3/2

Angle A sur la spirale logarithmique :

A = 1200 {(log3 – log2) / log2}

A = 1200{(0,4771 – 0,301) /0,301}

A = 701,94 cents (au lieu de 700 dans le système tempé

Soit un arc de :

(701,94 / 1200) x 360° = 210,58 ° (au lieu de